PERBANDINGAN METODE NEWTON-RAPHSON DAN ALGORITMA GENETIK PADA PENENTUAN *IMPLIED VOLATILITY* SAHAM

Kania Evita Dewi

Program Studi Teknik Informatika
Fakultas Teknik dan Ilmu Komputer Universitas Komputer Indonesia
E-mail : kaniae_dewi@yahoo.com

ABSTRAK

Penelitian ini bertujuan untuk menentukan *implied volatility* dari suatu saham dengan menggunakan algoritma genetika dan metode Newton-Raphson. Algoritma genetika yang merupakan suatu cara untuk mencari solusi masalah optimasi, tidak memerlukan sifat dari fungsi yang akan dicari solusinya, dapat menyelesaikan semua fungsi dengan syarat fungsi tersebut dapat diubah kedalam masalah optimasi. Dalam penelitian ini hasil perhitungan yang menggunakan algoritma genetika dibandingkan dengan hasil perhitungan dengan metode Newton-Raphson yang sudah biasa digunakan.

Hasil penelitian menunjukan *implied volatility* yang dihasilkan metode Newton-Raphson lebih mendekati volatilitas bursa dibanding yang dihasilkan algoritma genetika. Ini dapat dilihat dari selisih antara harga opsi teoritis dengan harga opsi dibursa yang dihasilkan metode Newton-Raphson lebih kecil dibanding yang dihasilkan algoritma genetika. Penelitian ini juga memperlihatkan bahwa volatilitas opsi *put* terhadap *strike price* berbentuk *volatility smile* dan untuk volatilitas opsi *call* terhadap *strike price* berbentuk *volatility skew* untuk opsi yang memiliki *maturity time* 1 bulan dan 2 bulan dan untuk *maturity time* yang lain volatilitasnya berbentuk *volatility smile*.

Kata kunci : Implied volatility, historical volatility, algoritma genetika dan metode newton-raphson.

1. PENDAHULUAN

Pergerakan saham walaupun sudah dapat diprediksi tetap saja masih mempunyai resiko untuk orang yang memilikinya, karena pergerakannya lebih banyak dipengaruhi oleh rumor yang ada dipasar. Meskipun demikian, tetap saja banyak orang menginvestasikan hartanya dalam bentuk saham. Hal ini disebabkan, seringkali keuntungan yang didapat dari jual-beli saham lebih besar dan cepat dibanding menabung di bank. Oleh karena itu, diperlukan suatu cara untuk mengamankan saham yang dimiliki. Salah satu usaha untuk mengamankan saham adalah opsi. Dengan memiliki opsi Eropa, pemegang opsi (*holder*) akan memiliki hak dan bukan kewajiban untuk membeli (opsi *call*) atau menjual (opsi *put*) saham pada pembuat opsi (*writer*), sebesar harga yang ditentukan yaitu *strike price*, pada saat *maturity time*.

Opsi *call* Eropa akan memberikan kerugian kepada *writer* jika yang terjadi pada saat *maturity time* adalah harga saham dibursa lebih besar dari *strike price*, karena *holder* akan meng*exercise* opsinya sehingga *writer* harus menjual saham sebesar *strike price* kepada *holder*, sehingga *writer* akan mengalami kerugian sebesar selisih harga saham dengan *strike price*, S-K. Sedangkan pada opsi *put* Eropa, *writer* juga dapat mengalami kerugian jika yang terjadi pada saat *maturity time* adalah *strike price* lebih besar dibanding harga saham dipasar, karena *holder* akan meng*exercise* opsinya dan *writer* harus membeli saham sebesar *strike price* dari *holder*, sehingga *writer* akan mengalami kerugian sebesar selisih *strike price* dengan harga saham, K-S. Untuk menutupi kerugian *writer* maka opsi tidak diberikan secara cuma-cuma. Untuk memiliki sebuah opsi dari suatu saham maka *holder* harus membeli opsi kepada *writer* pada saat pembuatan opsi, yang diharapkan uang tersebut dapat menutupi kerugian *writer* pada saat *maturity time*.

Oleh karena itu, diperlukan suatu model untuk menentukan harga opsi Eropa. Model yang sering digunakan adalah model Black-Scholes. Dalam model Black-Scholes diperlukan beberapa parameter yaitu harga saham S, *strike price* K, *maturity time* T, suku bunga r, dan volatilitas dari saham σ. Hampir semua parameter dapat diperoleh dibursa, hanya nilai volatilitas yang tidak dapat diperoleh langsung. Sedangkan dengan mengetahui nilai volatilitas dari suatu saham selain dapat menentukan harga opsi yang tepat, dengan mengetahui volatilitas suatu saham maka prediksi harga dapat dilakukan dikemudian hari untuk saham yang sama. Sehingga diperlukan suatu metode untuk menentukan volatilitas saham.

Menghitung volatilitas saham dapat dilakukan berbagai macam cara yang paling sederhana adalah dengan menghitung standar deviasi dari logaritma rasio harga-harga saham yang lampau. Volatilitas yang dihitung dengan cara ini dinamakan *historical volatility*.

Implied volatility adalah volatilitas yang digunakan dalam penentuan harga opsi Eropa yang diperoleh dengan cara menyamakan harga opsi teoritis, harga yang diperoleh dari model Black-Scholes, dengan harga opsi yang dipasar, $c(\sigma) = c^*$. Dengan memisalkan $f(\sigma) = c(\sigma) - c^*$, maka dapat dilihat bahwa volatilitas adalah akar dari persamaan $f(\sigma)$. Metode yang sering digunakan untuk menyelesaikan persamaan tersebut adalah metode Newton-Raphson. Karena syarat (turunan pertamanya) untuk menggunakan metode ini sudah diketahui.

Tetapi dengan menggunakan metode Newton-Raphson diperlukan tebakan awal yang mendekati akar, jika tidak maka ada kemungkinan tidak akan konvergen kesolusi yang dicari. Algoritma genetika adalah metode pencarian solusi yang berdasarkan seleksi alam. Metode ini bersifat acak, karena metode ini dimulai dari populasi solusi yang dibangun secara acak. Metode ini tidak memerlukan sifat dari fungsi yang akan dicari solusinya seperti turunan fungsi, sehingga metoda ini dapat digunakan untuk semua fungsi. Dengan metode ini diharapkan dapat menentukan nilai volatilitas saham yang lebih sesuai dengan bursa dibanding dengan metode Newton-Raphson.

2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Penentuan Harga Opsi

Opsi adalah surat perjanjian yang memberikan hak kepada pemilik (*holder*) untuk membeli (opsi *call*) atau menjual (opsi *put*) saham kepada pembuat kontrak (*writer*), dengan harga sesuai perjanjian (*strike price*) pada saat waktu kontrak habis (*maturity time*). Karena *holder* hanya memiliki hak dan bukan kewajiban, pada waktu kontrak habis pemegang opsi memiliki hak penuh untuk menentukan apakah opsi akan diexercise atau tidak, maksudnya holder tidak berkewajiban untuk membeli atau menjual saham kepada writer.

Opsi call akan diexercise oleh holder jika strike price, K, lebih kecil dibanding harga saham, S, dibursa. Keadaan seperti ini akan membuat writer mengalami kerugian karena holder akan membeli saham kepada writer sebesar strike price. Besar kerugian yang dialami writer adalah sebesar selisih harga saham dibursa dengan strike price, S-K.

Opsi put akan diexercise oleh holder jika harga saham dibursa lebih kecil dibanding strike price. Keadaan ini akan membuat writer mengalami kerugian karena holder akan menjual saham yang dimilikinya sebesar strike price kepada writer. Sehingga writer akan mengalami kerugian sebesar selisih strike price dengan harga saham, K-S.

Kerugian writer dapat ditanggulangi dengan cara opsi tidak diberikan secara cuma-cuma. Holder harus membeli opsi kepada writer dengan harga yang telah ditetapkan oleh *writer*. Harga opsi harus dapat menutupi kerugian *writer* pada saat *maturity time*. Maka diperlukan suatu metode untuk menetukan harga opsi yang sesuai sehingga tidak ada yang dirugikan. Salah satu model penentuan harga opsi adalah model Black-Scholes.

2.2 Model Black-Scholes

Model Black-Scholes dibuat dengan asumsi sebagai berikut:

a. Pasar modal kontinu sepanjang waktu.
b. Suku bunga r dianggap konstan sepanjang waktu.
c. Saham tidak memberikan dividen.
d. Tidak ada biaya dalam jual-beli saham.
e. Saham dapat berbentuk pecahan.
f. Tidak ada hukuman untuk melakukan *short selling* dan kegiatan ini diijinkan.
g. Tidak ada kemungkinan untuk melakukan *arbitrage.*

Pergerakan harga saham S pada saat t diasumsikan sesuai dengan gerak Brownian Geometrik

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dZ \qquad (1)$$

dengan μ adalah laju *expected* dari *return* saham dan σ adalah volatilitas saham, dan dZ adalah proses Wiener, dan μ dan σ diasumsikan konstan. Misalkan portofolio yang dibuat adalah menjual sebuah opsi dan membeli sebanyak Δ unit saham, dengan nilai portofolio tersebut adalah Π maka

$$\Pi = -V + \Delta S \qquad (2)$$

dimana V= $V(S,t)$ adalah harga opsi. Harga opsi adalah fungsi dari saham (S) dan waktu (t).

Menurut lemma Ito jika x adalah variabel yang memenuhi proses Ito, yaitu

$$dx = a(x,t)dt + b(x,t)dZ \qquad (3)$$

Dengan dZ adalah proses Wiener dan a dan b adalah fungsi dari x dan t. Maka suatu fungsi G terhadap x dan t akan memenuhi

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial x}a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}b^2\right)dt + \frac{\partial G}{\partial x}bdZ \qquad (4)$$

Maka persamaan (1) dan (2) menurut lemma Ito di atas, memiliki persamaan diferensial, dengan fungsi $G(x,t) = V(S,t)$ adalah

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial S}\mu S + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)dt + \frac{\partial V}{\partial S}\sigma S dZ \qquad (5)$$

dan

$$d\Pi = -dV + \Delta dS \qquad (6)$$

dengan mensubstitusi persamaan (1) dan (5) kepersamaan (6) diperoleh

$$d\Pi = \left[-\left(\left(\frac{\partial V}{\partial S}-\Delta\right)\mu S+\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)\right]dt + \left(\Delta-\frac{\partial V}{\partial S}\right)\sigma S dZ \qquad (7)$$

bagian stokastik dari portofolio adalah $\left(\Delta - \partial V \partial S \sigma S dZ\right.$. Dipilih $\Delta = \partial V \partial S$ sehingga resiko portofolio dapat dihilangkan.

Pada model Black-Scholes diasumsikan tidak ada kemungkinan untuk melakukan *arbitrage*. *Arbitrage* dapat terjadi jika terdapat perbedaan keuntungan dari portofolio dengan investasi dibank. Misal jika hasil dari portofolio lebih besar dari suku bunga bank, maka dapat dilakukan *arbitrage* dengan cara meminjam uang dari bank untuk membeli saham, sehingga akan mendapatkan keuntungan dari portofolio. Jika yang terjadi sebaliknya, keuntungan dari investasi di bank lebih besar dari portofolio, maka dapat dilakukan *arbitrage* dengan menjual seluruh portofolio kemudian diinvestasikan ke bank. Maka agar memenuhi asumsi *no-arbitrage* di buat $d\Pi = r\Pi dt$, sehingga

$$\left(-\frac{\partial V}{\partial t}-\frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right)dt = r\left(-V+S\frac{\partial V}{\partial S}\right)dt \qquad (8)$$

Persamaan (6) dapat disusun kembali maka diperoleh

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}+rS\frac{\partial V}{\partial S}-rV=0 \qquad (9)$$

Persamaan diferensial parsial di atas disebut persamaan Black-Scholes dengan $0 \le S \le \infty$ dan $0 \le t \le T$. Jika opsi yang dibuat adalah *call* maka simbol yang digunakan $V(S,t) = c(S,t)$, jika opsi yang dibuat adalah put maka simbolnya menjadi $V(S,t) = p(S,t)$. Persamaan (9) tidak mengandung μ. Persamaan (9) untuk opsi memerlukan syarat akhir, pada saat akhir kontrak, *payoff* dari opsi adalah

$$c(S,T) = \text{maks}\,(S-K,0) \qquad (10)$$

dan

$$p(S,T) = \text{maks}\,(K-S,0) \qquad (11)$$

dimana T adalah waktu akhir kontrak dan K adalah *strike price*. Karena persamaan model Black-Scholes dan *payoff* tidak mengandung μ, dapat ditarik kesimpulan bahwa resiko investor tidak berpengaruh terhadap nilai opsi.

Dengan menggunakan transformasi diperoleh solusi Black-Scholes

$$c = SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2) \qquad (12)$$

dengan:

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right)+\left(r+\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \qquad (13)$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right)+\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_1 - \sigma\sqrt{T-t} \qquad (14)$$

$$N(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\varphi} e^{-\frac{1}{2}a^2}da \qquad (15)$$

Persamaan (12) adalah solusi dari persamaan Black-Scholes.

2.3 Metode Newton Raphson

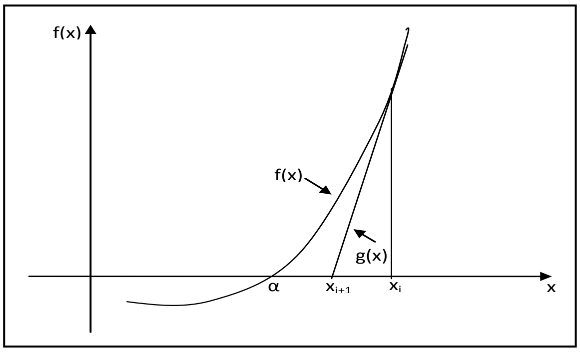
Metode Newton Raphson adalah salah satu metode numerik yang sangat baik untuk menentukan akar suatu fungsi. Metode ini selalu konvergen jika pemilihan titik awalnya mendekati solusi, dan metode ini konvergen secara kuadratik. Kekurangan dari metode ini adalah dalam perhitungan diperlukan turunan fungsi f'(x) dari fungsi f(x) yang ingin dicari akarnya.

Ilustrasi dari metode numerik diperlihatkan pada gambar 1. Fungsi f(x) adalah nonlinier. Fungsi f(x) dihampiri oleh fungsi linier g(x), dimana g(x) adalah turunan dari f(x), dan temukan solusi untuk g(x) = 0. Solusi tersebut diambil sebagai nilai hampiran solusi $x = \alpha$ dari $f(x) = 0$. Maka,

$$f'(x_i) = \text{gradien dari } f(x) = \frac{f(\alpha)-f(x_i)}{x_{i+1}-x_i} \qquad (16)$$

Solusi dari persamaan diatas untuk x_{i+1} adalah

$$x_{i+1} = x_i + \frac{f(\alpha)-f(x_i)}{f'(x_i)} \qquad (17)$$



Gambar 1. Metode Newton-Raphson

Persamaan (17) digunakan berulangkali sampai satu atau kedua titik memenuhi kriteria konvergen yaitu

$$|x_{i+1}-x_i| \le \varepsilon \quad \text{dan} \quad |f(x_{i+1})-f(x_i)| \le \delta \qquad (18)$$

Metode Newton-Raphson dapat juga diperoleh dari deret Taylor, yaitu

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1}-x_i) + \cdots \qquad (19)$$

Persamaan di atas dipotong setelah turunan pertama maka solusi untuk x_{i+1} yang menjadi hampiran selanjutnya α adalah

$$x_{i+1} = x_i + \frac{f(\alpha)-f(x_i)}{f'(x_i)} \qquad (20)$$

Persamaan (17) sama dengan (20). Maka benar metode newton dapat diperoleh dari deret taylor.

Volume. I Nomor. 2, Bulan Oktober 2012 - ISSN :2089-9033

Laju kekonvergenan dari metode Newton-Raphson ditentukan sebagai berikut. Perhatikan persamaan (17) untuk kasus $f(x) = 0$:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \qquad (21)$$

Misalkan $x = \alpha$ adalah solusi dan $e = (x - \alpha)$ adalah galat. Kurangi kedua ruas persamaan (20) dengan α diperoleh

$$x_{i+1} - \alpha = e_{i+1} = x_i - \alpha - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$
$$= e_i - \frac{f(x_i) - f(\alpha)}{f'(x_i)} \qquad (22)$$

Dengan menggunakan teorema nilai antara

$$e_{i+1} = e_i - \frac{(x_i - \alpha)f'(\xi_i)}{f'(x_i)}, x_i \le \xi_i \le \alpha \qquad (23)$$

Kedua ruas bagi dengan e_i, sehingga diperoleh

$$\frac{e_{i+1}}{e_i} = 1 - \frac{f'(\xi_i)}{f'(x_i)} < 1 \qquad (24)$$

Jika persamaan (24) dapat dipenuhi untuk i yang bergerak naik, maka dapat dikatakan galat bergerak monoton turun menuju nol. Jika persamaan (24) tidak dipenuhi maka metode tidak konvergen, karena galat bergerak naik dan divergen.

2.4 Algoritma Genetika

2.4.1 Mengkode parameter

AG bekerja dengan kode yang mewakili parameter. Jika variabel $x \in [a, b]$ akan dinyatakan dalam biner dengan ketelitian k angka dibelakang koma, maka untuk menentukan panjang string yang digunakan adalah. Misalkan interval [a,b] terpartisi menjadi n titik, maka

Titik ke-1:= a

Titik ke-2:= $a + 10^{-k}$

Titik ke-3:= $a + 2.10^{-k}$

⋮

Titik ke-i:= $a + (i-1)10^{-k}$

Titik ke-n:= $b = a + (n-1)10^{-k} \rightarrow n = (b-a)10^k + 1$

Sedangkan string biner dengan panjang ℓ akan menghasilkan 2^ℓ string berbeda yang dapat terbentuk. Karena setiap variabel harus dikodekan ke dalam string maka haruslah

$$(b-a)10^k + 1 \le 2^l \qquad (25)$$

agar selisih $(b-a)10^k$ dan 2^{l-1} sekecil mungkin maka ℓ harus memenuhi

$$2^{l-1} \le (b-a)10^k \le 2^l - 1 \qquad (26)$$

Jadi, panjang string terbaik untuk ketelitian angka dibelakang koma sebesar k adalah ℓ.

2.4.2 Membangun Populasi Awal

Populasi awal dari solusi dapat dikonstruksi dengan:

1. Melakukan pelemparan koin sebanyak ukuran populasi x panjang string
2. Program matlab

2.4.3 Evaluasi

Suatu kromosom dievaluasi berdasarkan suatu fungsi tertentu sebagai ukuran performansinya. Di dalam evolusi alam, kromosom yang nilai *fitness*nya tinggi yang akan bertahan hidup. Sedangkan kromosom yang nilai *fitness*nya rendah akan mati. Evalusi AG dilakuakan untuk menemukan kromosom yang memiliki nilai tinggi yang nantinya akan menghasilkan string baru pada generasi selanjutnya. Cara untuk melakukan evaluasi adalah:

Mengubah bentuk biner menjadi bentuk riil. Misalkan $x \in [a, b]$ dan panjang string l agar setiap anggota x mempunyai bentuk biner maka selang [a,b] maka selang [a,b] terpartisi menjadi $2^l - 1$ selang dengan panjang selang $\frac{b-a}{2^l-1}$. Dengan lokasi variabel adalah bilangan aritmatik dasar 2. Partisi selang [a,b] dapat dinyatakan dalam bentuk barisan hingga $\{a_i\}$ dengan

$$a_i = a + \text{lokasi variabel } \frac{b-a}{2^l - 1} \qquad (27)$$

Jadi apabila $x_i \in [a, b]$ adalah representasi string ke-i maka

$$x_i = a + (i-1)\frac{b-a}{2^l - 1} \qquad (28)$$

Setelah diperoleh bentuk riil, substitusi kefungsi objektif. Kemudian ubah kedalam fungsi *fitness* f.

Pada masalah optimasi, jika solusi yang dicari adalah memaksimalkan sebuah fungsi h, maka nilai *fitness* dapat menggunakan nilai fungsi h tersebut, yakni $f = h$ (dimana f adalah nilai *fitness*). Tetapi jika masalahnya adalah meminimumkan fungsi h, maka fungsi h tidak dapat dipergunakan secara langsung. Hal ini disebabkan adanya aturan bahwa kromosom yang memiliki nilai *fitness* tinggi lebih mampu bertahan hidup pada generasi selanjutnya. Nilai *fitness* yang digunakan adalah $f = -h$.

2.4.4 Seleksi

Pendekatan *roulette wheel* yang diadaptasi untuk proses seleksi. Proses ini bergantung dengan proporsi *fitness* tiap kromosom. Kromosom yang memiliki proporsi yang besar maka kromosom tersebut memiliki kesempatan yang lebih besar untuk lanjut ke generasi selanjutnya dibanding kromosom yang memiliki proporsi yang lebih kecil. *Roullet wheel* dapat dibuat dengan:

1. Menghitung nilai *fitness* $f(x_k)$ untuk setiap kromosom x_k:
   $$f(x_k) \quad k = 1, 2, \ldots, \text{ukuran populasi}$$
2. Hitung nilai total *fitness* untuk populasi:
   $$F = \sum_{k=1}^{\text{ukuran populasi}} f(x_k)$$
3. Hitung kemungkinan terpilih p_k untuk setiap kromosom x_k:
   $$p_k = \frac{f(x_k)}{F}$$
4. Hitung kumulatif q_k untuk setiap kromosom x_i:

Volume. I Nomor. 2, Bulan Oktober 2012 - ISSN :2089-9033

$$q_k = \sum_{k=1}^{k} p_i \quad , k = 1,2,\ldots,\text{ukuran populasi}$$

Langkah-langkah melakukan seleksi:

1. Bangkitkan bilangan acak r , $r \in [0,1]$
2. Jika $r \leq q_1$, maka pilih kromosom kesatu x_1; sebaliknya, pilih kromosom ke-k x_k ($2 \leq k \leq$ ukuran populasi jika $qk-1<r\leq qk$.

2.4.5 Persilangan

Persilangan disini digunakan metode satu titik potong, titik potong dipilih secara acak, kemudian mengkombinasikan kedua kromosom yang terpilih sehingga menjadi offspring. Sebelum melakukan persilangan tentukan laju persilangan (p_c) sebagai rasio antara banyaknya kromosom yang mengalami persilangan dengan banyaknya kromosom.

Langkah-langkah melakukan persilangan:

1. Pasangkan setiap kromosom dalam populasi secara acak sehingga terdapat $\frac{\text{ukuran populasi}}{2}$ pasang
2. Bangkitkan bilangan acak r, $r \in [0,1]$ sebanyak pasangan yang ada.
   a. Jika $r_i \leq p_c , i = 1,2,\ldots,\left(\frac{ukuran\ \ populasi}{2}\right)$, maka pasangan ke-i akan mengalami persilangan.
   b. Jika $r_i > p_c , i = 1,2,\ldots,\left(\frac{ukuran\ \ populasi}{2}\right)$, maka pasangan ke-i tidak mengalami persilangan, langsung dikopi ke generasi selanjutnya.
3. Bangkitkan bilangan bulat acak pos, $pos \in [1, l-1]$ untuk setiap pasangan.
   Misal bilangan random j yang terpilih untuk pasangan ke-i maka akan menghasilkan 2 offspring yaitu
   a. *Offspring*1 berasal dari bit ke-1 sampai ke-j dari induk kesatu dilanjutkan bit ke-j+1 sampai bit terakhir dari induk kedua
   b. *Offspring*2 berasal dari bit ke-1 sampai ke-j dari induk kedua dilanjutkan bit ke-j+1 sampai bit terakhir dari induk kedua

2.4.6 Mutasi

Mutasi adalah mengubah satu atau lebih bit dalam populasi dengan sebuah peluang sama dengan peluang mutasi p_m. Pada string biner, jika bit mengalami mutasi maka nilai ‘0’ menjadi ‘1’ begitu juga sebaliknya.

Peluang mutasi adalah rasio antara banyak bit yang mengalami mutasi dengan banyaknya bit dalam suatu populasi. Jika panjang string adalah l maka proporsi bit yang mengalami mutasi terhadap populasi adalah $N = p_m \times l \times ukuran\ populasi$.

Langkah-langkah mutasi:

1. Bangkitkan bilangan acak $r_i \in [0,1]$ sebanyak jumlah bit yang ada dalam populasi
2. Jika $r_i \leq p_m , i = 1,2,\ldots,l$, maka bit ke-i dalam populasi akan mengalami mutasi

2.4.7 Kriteria pemberhentian iterasi

Ada dua tes untuk kriteria pemberhentian iterasi, yaitu:

1. Uji konvergensi
   Iterasi akan dihentikan jika populasi telah mengalami kestabilan suatu populasi dikatakan stabil jika populasi tersebut memenuhi definisi kestabilan populasi (Offersman dalam Soebagio, 2006) sebagai berikut:
   Definisi: Populasi stabil. Misal P suatu populasi yang terdiri dari n kromosom dan setiap kromosom terdiri dari l bit, $A_i = A_i(1)\ A_i(2)\ \ldots\ A_i(l)$ string untuk kromosom ke-I pada populasi P. Bit $A_i(p)$ dikatakan stabil jika dan hanya jika terdapat dari 90% individu dalam populasi dengan $A_i(p) = c$, i = 1, 2, …, n, c bernilai 0 atau 1 untuk suatu p (p=1, 2, …,l), populasi dikatakan stabil jika semua gen pada populasi P tersebut stabil
2. Uji iterasi
   Selain kriteria konvergensi diatas, suatu iterasi akan mengalami stoping jika telah tercapai iterasi maksimum yang telah ditentukan sebelumnya.

2.4.8 Metode elitis

Seperti diketahui diatas bahwa penyeleksian dilakukan secara random maka tidak ada jamin bahwa suatu kromosom bernilai *fitness* tinggi akan selalu terpilih. Kalaupun kromosom bernilai *fitness* tertinggi terpilih, mungkin saja individu tersebut akan mengalami persilangan atau mutasi sehingga memungkinkan nilai *fitness*nya menurun. Oleh karena itu, perlu upaya untuk mencegah kejadian itu terjadi, dengan cara mengkopi satu atau dua kromosom yang memiliki nilai *fitness* terbaik untuk populasi selanjutnya. Proses ini dinamakan elitisme.

2.5 Hasil Algoritma Genetika

Data yang digunakan dalam perbandingan adalah indeks FTSE 100 yang berasal dari www.liffe-data.com. Sebelum mencari akar, harus dipastikan terlebih dahulu apakah data memiliki akar dengan cara memeriksa

$$\max\left(S - Ke^{-r(T-t)}, 0\right) \leq c^* < S$$

Untuk opsi *call* dan

$$\text{maks}\left(Ke^{-r(T-t)} - S, 0\right) \leq p * < Ke^{-r(T-t)}$$

untuk opsi *put*.

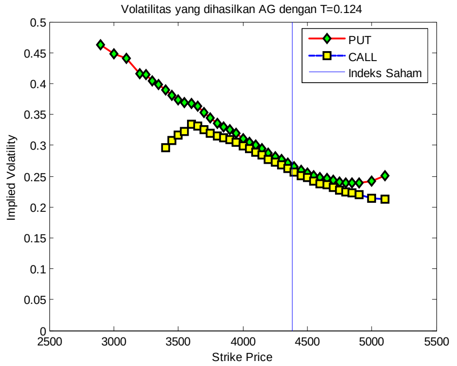
Setiap hasil data dilihat variasinya untuk melihat sebaran data yang diperoleh, dengan formula

$$\text{variasi} = \frac{\text{nilai terbesar} - \text{nilai terkecil}}{\text{nilai terbesar}}$$

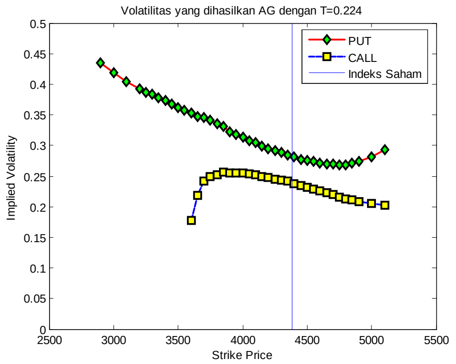
dengan menggunakan fungsi *fitness* dipilih

$$\underset{\sigma}{\text{maks}}\ \textit{fitness}(\sigma) = \frac{1}{1 + |f(\sigma)|}$$

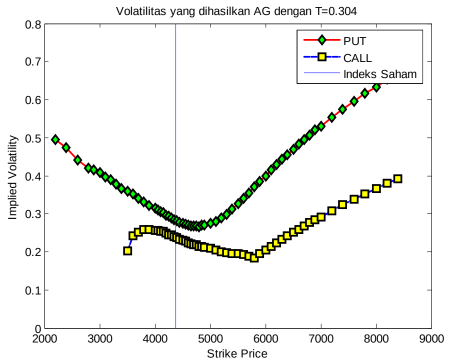
karena sigma adalah akar dari fungsi $f(\sigma)$ maka jika sigma yang diperoleh adalah akarnya maka fungsi *fitness* akan mencapai maksimum dengan nilai 1, diperoleh



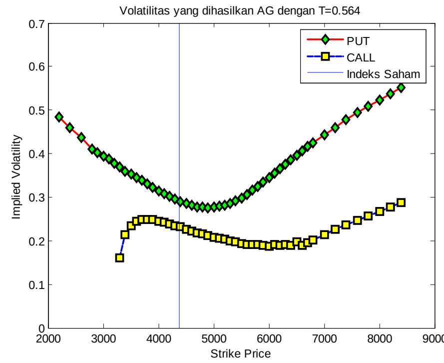
Gambar 2. Volatilitas Hasil AG Terhadap *Strike price* dengan T = 0,124



Gambar 3. Volatilitas Hasil AG Terhadap *Strike price* dengan T = 0,224



Gambar 4. Volatilitas Hasil AG Terhadap *Strike price* dengan T = 0,304



Gambar 5. Volatilitas Hasil AG Terhadap *Strike price* dengan T = 0,564

2.6 Hasil Newton-Rapshon

Untuk data yang sama, untuk perhitungan volatilitas menggunakan Newton-Raphson. Persamaan yang akan dicari akarnya disini adalah $f(\sigma) = c(\sigma) - c^*$, dengan c* adalah harga opsi call dipasar. Sebagai syarat penggunaan metode Newton-Raphson adalah turunan pertama diketahui. Turunan pertama dari harga opsi teoritis, $\frac{\partial c}{\partial \sigma}$ = vega, yaitu:

$$\text{vega} = S\sqrt{T-t}N'(d_1) \qquad (27)$$

Turunan keduanya $\left(\frac{\partial^2 c}{\partial \sigma^2}\right)$ adalah

$$\frac{\partial^2 c}{\partial \sigma^2} = S\sqrt{T-t}\,\frac{\partial^2 N(d_1)}{\partial \sigma \partial d_1} \qquad (28)$$

Dengan

$$\frac{\partial^2 N(d_1)}{\partial \sigma \partial d_1} = \frac{\partial}{\partial d_1}\left(\frac{\partial N(d_1)}{\partial \sigma}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial d_1}\left(\frac{\partial N(d_1)}{\partial d_1}\frac{\partial d_1}{\partial \sigma}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(-d_1 e^{-\frac{1}{2}d_1^2}\right)\frac{\partial d_1}{\partial \sigma}$$

Perhatikan

$$\frac{\partial d_1}{\partial \sigma} = \sqrt{T-t} - \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma^2(T-t)}$$

$$= -\left[\frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma^2(T-t)}\right]$$

$$= -\frac{d_2}{\sigma}$$

Sehingga

$$\frac{\partial^2 N(d_1)}{\partial \sigma \partial d_1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}d_1^2}\left(\frac{d_1 d_2}{\sigma}\right)$$

Sehingga turunan keduanya dapat ditulis kembali menjadi

$$\frac{\partial^2 c}{\partial \sigma^2} = \frac{S}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}d_1^2}\sqrt{T-t}\left(\frac{d_1 d_2}{\sigma}\right)$$

$$= \frac{d_1 d_2}{\sigma}\frac{\partial c}{\partial \sigma} \qquad (29)$$

$\frac{\partial c}{\partial \sigma}$, lihat persamaan 27, mencapai maksimum diselang $[0,\infty)$ jika $e^{-\frac{1}{2}d_1^2} = 1$, maka $d_1 = 0$ dan ini terjadi pada saat $\sigma = \hat{\sigma}$ dimana

$$\hat{\sigma} = \sqrt{2\left|\frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + r(T-t)}{T-t}\right|} \quad (30)$$

Dengan mensubstitusi persamaan (13) dan (14) ke persamaan (29) diperoleh

$$\frac{\partial^2 c}{\partial \sigma^2} = \frac{\left(\ln\left(\frac{S}{K}\right) + r(T-t)\right)^2 - \frac{1}{4}\sigma^4 (T-t)^2}{\sigma^3 (T-t)} \frac{\partial c}{\partial \sigma} \quad (31)$$

Menggunakan persamaan (30) maka persamaan (31) menjadi

$$\frac{\partial^2 c}{\partial \sigma^2} = \frac{T-t}{4\sigma^3}(\hat{\sigma}^4 - \sigma^4)\frac{\partial c}{\partial \sigma} \quad (32)$$

Berdasarkan (32) memperlihatkan c(σ) cekung ke atas untuk $\sigma < \hat{\sigma}$ dan cekung ke bawah untuk $\sigma > \hat{\sigma}$.

Menurut metode Newton-Raphson

$$\sigma_{n+1} = \sigma_n - \frac{f(\sigma_n)}{f'(\sigma_n)} \quad (33)$$

Misalkan $\sigma = \sigma^*$ adalah solusi dan $e = (\sigma - \sigma^*)$ adalah galat. Kurangi kedua ruas persamaan (32) dengan σ^* diperoleh

$$\sigma_{n+1} - \sigma^* = e_{n+1} = \sigma_n - \sigma^* - \frac{f(\sigma_n) - f(\sigma^*)}{f'(\sigma_n)}$$
$$= e_n - \frac{f(\sigma_n) - f(\sigma^*)}{f'(\sigma_n)} \quad (34)$$

Menggunakan teorema nilai antara, diperoleh

$$e_{n+1} = e_n - \frac{(\sigma_n - \sigma^*) f'(\xi_n)}{f'(\sigma_n)}, \sigma_n < \xi_n < \sigma^*$$

$$e_{n+1} = e_n - \frac{e_n f'(\xi_n)}{f'(\sigma_n)} \quad (35)$$

Kedua ruas persamaan (35) bagi dengan e_n, sehingga diperoleh

$$\frac{e_{n+1}}{e_n} = 1 - \frac{f'(\xi_n)}{f'(\sigma_n)} \quad (36)$$

Dengan tebakan awal $\sigma_0 = \hat{\sigma}$ yang membuat $\frac{\partial c}{\partial \sigma}$ mencapai nilai maksimumnya dan diketahui bahwa $\frac{\partial c}{\partial \sigma} > 0$ maka haruslah $0 < f'(\xi_0) < f'(\sigma_0)$ sehingga diperoleh

$$0 < \frac{e_1}{e_0} < 1 \quad (37)$$

Dari persamaan (37) diketahui bahwa galatnya mengecil, dengan syarat e_1 bertanda sama dengan e_0.

Jika $\hat{\sigma} < \sigma^*$ maka persamaan (37) memperlihatkan juga jika $\sigma_0 < \sigma_1 < \sigma^*$. Berdasarkan persamaan (32) diketahui bahwa $f''(\sigma) < 0$ untuk semua $\sigma > \hat{\sigma}$ dan diketahui dari persamaan (36) bahwa $\sigma_1 < \xi_1 < \sigma^*$. Sehingga $0 < f'(\xi_1) < f'(\sigma_1)$ maka dari persamaan (36) diperoleh

$$0 < \frac{e_2}{e_1} < 1$$

Dengan melanjutkan argumen diatas maka akan diperoleh

$$0 < \frac{e_{n+1}}{e_n} < 1, \text{untuk semua } n \geq 0 \quad (38)$$

Jadi, dengan meningkatnya n galatnya bergerak monoton turun.

Jika $\hat{\sigma} > \sigma^*$ maka persamaan (37) memperlihatkan jika $\sigma_0 > \sigma_1 > \sigma^*$. Berdasarkan persamaan (33) diketahui bahwa $f''(\sigma) > 0$ untuk semua $\sigma < \hat{\sigma}$ dan diketahui persamaan (36) bahwa $\sigma^* < \xi_1 < \sigma_1$. Sehingga diperoleh $0 < f'(\xi_1) < f'(\sigma_1)$ maka dari persamaan (37) diperoleh

$$0 < \frac{e_2}{e_1} < 1$$

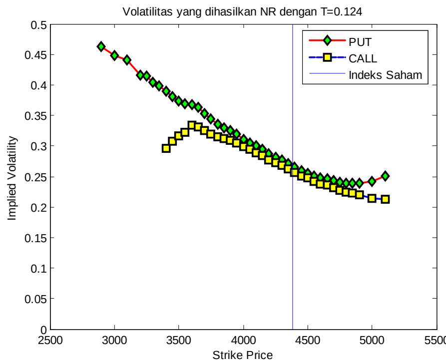
Dengan melanjutkan argumen diatas maka akan diperoleh

$$0 < \frac{e_{n+1}}{e_1} < 1, \text{untuk semua } n \geq 0 \quad (39)$$

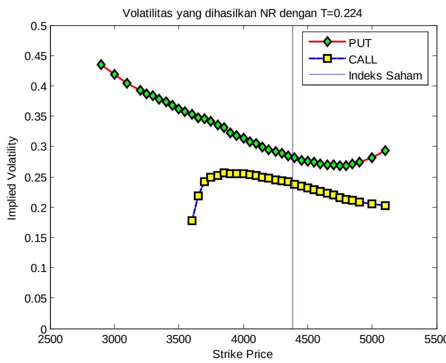
Jadi, dengan meningkatnya n galatnya bergerak monoton turun.

Jadi dapat disimpulkan bahwa dengan pemilihan $\sigma_0 = \hat{\sigma}$, galat akan bergerak monoton turun dengan meningkatnya n. Sehingga dijamin selalu konvergen jika menggunakan tebakan awal $\hat{\sigma}$.

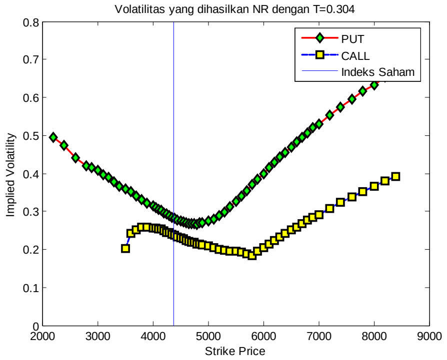
Hasil yang diperoleh dari metode Newton-Raphson dengan menggunakan konvergensi yang dipilih untuk metode ini adalah 10^{-6}.



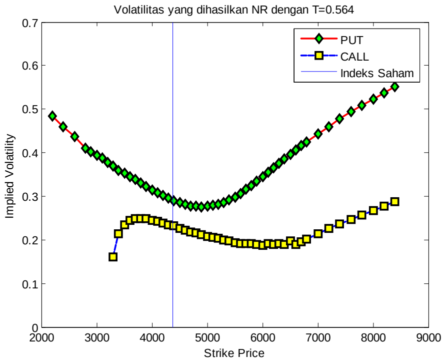
Gambar 6. Volatilitas Hasil NR Terhadap *Strike price* dengan T = 0,124



Gambar 7. Volatilitas Hasil NR Terhadap *Strike price* dengan T = 0,224



Gambar 8. Volatilitas Hasil NR 4 Juni 2009 Terhadap *Strike price* dengan T = 0,304



Gambar 9. Volatilitas Hasil NR 4 Juni 2009 Terhadap *Strike price* dengan T = 0,564

3. PENUTUP

Berdasarkan hasil studi literatur dan penelitian dapat ditarik kesimpulan bahwa:

1. Algoritma Genetika dapat digunakan dalam menentukan *implied volatility* dengan mengubah persoalan mencari akar menjadi optimasi, dengan menggunakan fungsi objektif tertentu, seperti
$$F(\sigma) = \frac{1}{1 + |f(\sigma)|}$$
Dan hasilnya pun dapat dibandingkan dengan hasil metode lain.
2. Nilai volatilitas yang dihasilkan oleh Algoritma Genetika tidak lebih baik dibandingkan nilai volatilitas yang dihasilkan oleh metode Newton-Raphson yang menggunakan tebakan awal khusus. Ini dapat dilihat dari selisih harga opsi bursa dengan harga opsi teoritis yang menggunakan volatilitas hasil metode Newton-Raphson selalu lebih kecil dibanding selisih harga opsi bursa dengan harga opsi teoritis yang menggunakan volatilitas algoritma genetika. Sedangkan diketahui jika semakin kecil selisih harga opsi bursa dengan harga opsi teoritis maka semakin dekat perkiraan volatilitas yang diperoleh. Dalam menghasilkan nilai volatilitas metode Newton-Raphson lebih cepat dibanding algoritma genetika, karena untuk algoritma genetika harus dilakukan 20 kali *running* program kemudian dipilih yang terbaik yang akan dipilih sebagai solusi sedangkan metode Newton-Raphson hanya diperlukan sekali *running* program.
3. Trend yang dihasilkan metode algoritma genetika dan metode Newton-Rapshon mirip. Untuk opsi *put implied volatility* yang dihasilkan menyerupai *smile*, tetapi titik terendahnya tidak pada *at-the-money* seperti yang biasa terjadi, titik terendahnya berada pada sekitar *in-the-money*. Untuk opsi *call implied volatility* pada bagian *in-the-money* naik kemudian turun, pada bagian *out-the-money* untuk yang *maturity time* kecil yang terlihat trendnya selalu turun atau sering disebut *volatility skew*, tetapi untuk yang *maturity time* besar trendnya turun pada suatu saat akan naik lagi, sehingga menyerupai *volatility smile*.

DAFTAR PUSTAKA

1. Gen, M. and Cheng, R. 1997. *Genetic Algorithms and Engineering Design*. New York: John Wiley & Sons
2. Goldberg. D. J. 1989. *Genetic Algorithms in Search Optimization and Machine Learning*. Kanada: Addison-Wesley Publishing Company
3. Grace, B. K. 2000. Black-Scholes Option Pricing via Genetic Algorithms. *Applied Economics Letters*, Vol. 7, pp. 129-132.
4. Higham, D. J. 2008. *An Introduction to Financial Option Valuation*. Cambridge: Cambridge University Press
5. Hoffman, Joe. 1993. *Numerical Method for Engineers and Scientists*. Singapur: McGraw-Hill
6. Hull, J. C. 2002. *Option, Futures, and Other Derivatives*. New Jersey: Prentice Hall, Fifth edition
7. Kwok. Y.K. 1957. *Mathematical Models of Financial Derivatives*. Hong Kong: Springer
8. Soebagio, M. H. 2006. *Penentuan Harga Opsi dengan Algoritma Genetika Kasus Opsi Call* Eropa. Tugas akhir S1 Prodi Matematika pada FMIPA ITB. Bandung: Tidak diterbitkan
9. Suyanto. 2005. *Algoritma Genetika dalam Matlab*. Yogyakarta: Andi Offset
10. Wilmott,P., Howison, S., and Dewynne, J. 1996. *The Mathematics of Financial Derivatives*. Cambridge: Cambridge University Press
11. www.liffe-data.com. Diakses tanggal 4,5,8,10,11,12 Juni 2009.